Lösungen zur Probeklausur 2 • 13.1

für Montag, 2. Dezember 2019 • 4 Unterrichtsstunden

Analysis • Lineare Algebra • Stochastik

Prüfungsteil 1 • ohne Hilfsmittel

Nach Landesabitur 2019 Nachtermin • Prüfungsteil 1 • Vorschlag A

Vorschlag A

Analysis | Niveau 1

1. Da f bei $x=0$ eine Nullstelle hat, sind die Abschnitte von -1 bis 0 und von 0 bis 1 getrennt zu berechnen und zu addieren:

$$A = \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x = \left| \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} \right| + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \left|0 - \tfrac{1}{2}\right| + \tfrac{1}{2} - 0 = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1$$

2. Das Integral *bilanziert* Inhalte von Flächen, die oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen. Da $f(x)$ im Intervall $[-1\,;1]$ die Nullstelle $x=0$ besitzt und der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft, ist das Integral Null. In Aufgabe 1 wurde dagegen keine Bilanz von Flächeninhalten, sondern ein Flächeninhalt berechnet.

Stochastik | Niveau 1

3. Der Ergebnisraum des Experiments besteht aus Tupeln (m,w), wobei unabhöngig voneinander das Ergebnis Münze m „Kopf“ K oder „Zahl“ Z sein kann und der Würfel w die Augenzahlen 1 bis 6 annehmen kann. Das sind 12 Ergebnisse:

$$\Omega = \{\,(K,1),\ldots,(K,6);(Z,1),\ldots,(Z,6)\,\}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die des Ereignisses „Kopf und Ungerade“ (unabhängig voneinander), also $P(K\cap U) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. — Oder: Die für das Ereignis günstigen Ergebnisse innerhalb von Ω sind unter den ersten 6 jedes zweite, also 3 Stück, und daher ist $P = 3/12 = 1/4$.

4. Die Auswahl von $n=5$ stellt eine Wiederholung eines elemantaren Bernoulli-Experiments mit den zwei Ausgängen „weiblich“ (Erfolg) und „nicht weiblich“ dar. Jedoch handelt es sich nicht um eine echte Wiederholung, also keine Bernoulli*kette*, da sich die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert, nämlich gewissermaßen „ohne Zurücklegen“ gezogen wird: es sollen ja 5 Personen ausgewählt werden, die also verschieden sein müssen.

5. Es handelt sich um das Ereignis, dass bei einer Bernoulli-Kette mit $n=12$ Stufen und einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p=0{,}4$ genau 8 Treffer erzielt werden.

Lineare Algebra | Niveau 1

GK

6. P „eingesetzt in E" erfüllt die Gleichung: $2-1-(-2)=3=d_E$.

7. $d(P,O)=\left|\overrightarrow{PO}\right|=\left|\vec{0}-\vec{p}\right|=|-\vec{p}|=|\vec{p}|=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$.

8. Als Richtungsvektor wird (irgend) ein Vektor in E-Richtung benötigt, also senkrecht zu $\vec{n}_E$: Zum Beispiel zwei Komponenten vertauschen und dritte 0 setzen. Als Aufpunkt können wir P nutzen.

$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Alternativ lässt sich leicht ein zweiter Punkt Q als Lösung der E-Gleichung bestimmen und als Richtungsvektor dann $\overrightarrow{PQ}$ berechnen.

Lineare Algebra | Niveau 1

9. Ablesen von A in xz-Ebene ergibt $A=(4|0|6)$.

10. Die Spiegelebene liegt mittig „zwischen" C und C', genauer: senkrecht zu

$$\overrightarrow{CC'}=\vec{c'}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-4\\-8\\6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}=:\vec{n}_E.$$

Und der Mittelpunkt M liegt in dieser Spigelebene. Diesen erreichen wir von C aus auf halbem Weg in Richtung C', das ist hier genau $-\vec{n}$.

$$\vec{m}=\vec{c}+(-\vec{n})=\vec{c}-\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Den Punkt $M(0|0|3)$ setzen wir in $E:2x+4y-3z=d$ ein und erhalten $d=-9$. Eine Koordinatengleichung von E ist also $E:2x+4y-3z=-9$.

Prüfungsteil 2 • mit Hilfsmitteln

Vorschlag B | Stochastik | Pflichtgebiet

Landesabitur 2017 Nachtermin • Vorschlag C

1. Mit X als Anzahl der Jungen, die regelmäßig Alkohol trinken, ist

$$P(A)=P(X=2)=B(8;0{,}169;2)=\binom{8}{2}\cdot 0{,}169^2\cdot 0{,}831^6\doteq 0{,}2634=26{,}34\,\%.$$

Mit X als Anzahl der Jugendlichen, die noch nie Alkohol getrunken haben, ist

$$P(B) = P(X \geqslant 10) = 1 - F(20;0{,}3;9) \doteq 1 - 0{,}9520$$
$$\text{oder } = \sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{20-k} = 0{,}0480 = 4{,}8\,\%.$$

Mit X als Anzahl Anzahl der Mädchen, die regelmäßig Alkohol trinken, ist

$$P(C) = P(2 < X \geqslant 5) = F(12;0{,}094;5) - F(2) \doteq 0{,}9996 - 0{,}9040$$
$$\text{oder } = \sum_{k=3}^{5} \binom{12}{k} \cdot 0{,}094^k \cdot 0{,}906^{12-k} = 0{,}0956 = 9{,}56\,\%.$$

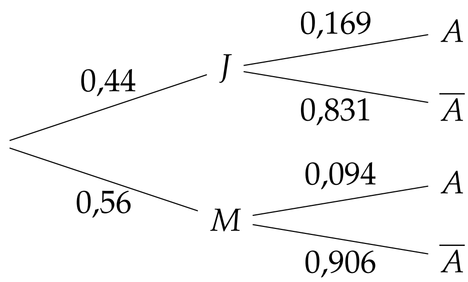
2. Mit dem Bruchterm wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass sich unter den 11 Jugendlichen, die in die Disco gehen, genau 7 Mädchen und 4 Jungen befinden. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 33 %. Dabei ist $\binom{12}{7}$ die Anzahl der Möglichkeiten, 7 aus 12 Mädchen auszuwählen, und $\binom{8}{4}$ die Anzahl der Möglichkeiten, 4 aus 8 Jungen auszuwählen. Der Nenner ist die Anzahl aller Möglichkeiten, 11 aus 20 Jugendlichen auszuwählen.

2. Ansatz für die gesuchte Anzahl n ist $0{,}99 \leqslant P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$, also $P(X = 0) \leqslant 1 - 0{,}99 = 0{,}01$. Im Grenzfall:

$$0{,}01 = B(n;0{,}3;0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^n = 0{,}7^n$$

Aufgelöst ist $n = \log_{0{,}7}(0{,}01) = 12{,}91\ldots$, weshalb n mindestens 13 sein muss.

3. Gesucht ist $P(J \cap \overline{A}) = 0{,}44 \cdot 0{,}831 \doteq 0{,}3656 = 36{,}56\,\%$.

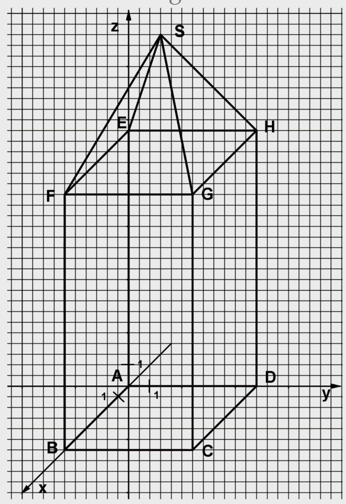


4. Gesucht ist

$$P_A(M) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{0{,}56 \cdot 0{,}094}{0{,}56 \cdot 0{,}094 + 0{,}44 \cdot 0{,}169} \doteq 0{,}4145 = 41{,}45\,\%.$$

Vorschlag C1 | Lineare Algebra | Wahlgebiet

Landesabitur 2017 • Prüfungsteil 2 • Vorschlag B2



1. $C = (6|6|0)$ und $F = (6|0|12)$

2. Der Inhalt einer Dachfläche kann über das (halbe) Vektorprodukt von zwei ihrer Seitenvektoren berechnet werden oder elementar: Die Höhe des Dreiecks ermittlen über Pythagoras als Hypothenuse im Hilfsdreieck das senkrecht und die Dachfläche halbierend unter der Spitze im Dach „steht“. So ist $h = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ und damit

$$A = \tfrac{1}{2}gh = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{45} \doteq 80{,}50[\mathrm{m}^2].$$

3. Eine Parametergleichung zu E_{GHS} ist $\vec{x} = \vec{g} + r\cdot\overrightarrow{GH} + s\cdot\overrightarrow{GS}$, also

$$E_{GHS} : \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\12\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir $\vec{n}$ über das Vektorprodukt der beiden skalierten Richungsvektoren:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$$

Daraus ergibt sich $d = \vec{n}\cdot\vec{g} = 0 + 12 + 12 = 24$, also $E_{GHS} : 2y + z = 24$.

4. (1) Eine Gleichung der Geraden g, die den ersten Stützbalken enthält. (2) Die Gerade g wird mit der Dachebene E_{GHS} geschnitten und man erhält den Parameterwert $r = 125$. (3) Einsetzen dieses r in g liefert den Punkt P, an dem der Balken das Dach berührt:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix}3\\0\\12\end{pmatrix} + \frac{1}{12}5\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\24/5\\72/5\end{pmatrix}$$

(4) Die Länge des Stützbalkens ist

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\24/5\\12/5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0 + 4{,}8^2 + 2{,}4^2} \doteq 5{,}37[\mathrm{m}].$$

5.